

要素剛性マトリックスの修正による応用要素法 (AEM) の解析精度向上に関する検討

正会員 李 煥九<sup>\*1</sup> 同 崔 琥<sup>\*2</sup>  
同 松川 和人<sup>\*2</sup> 同 中埜 良昭<sup>\*3</sup>

応用要素法      要素剛性マトリックス      弾性解析

1. はじめに

筆者らは、無補強組積造 (URM) 壁を含む RC 造架構の耐震性能評価を目的として、URM 壁の面外転倒を含む架構全体の挙動が解析的に再現できる応用要素法 (以下、AEM, Applied Element Method) に基づく非線形解析プログラムを開発してきた。既往の研究<sup>[1]</sup>では AEM による弾性解析結果が理論値に収束しない問題があったが、その原因または解決方法は明確にされていない。本論文では、既往の AEM の要素方程式に改良を行うことにより解析精度の向上を試みる。

2. AEM の概要

AEM とは、脆性的な材料を持つ部材の大変形解析に適用されている個別要素法 (DEM, Discrete Element Method) において、微小変形解析での精度を改善するため、目黒・Hatemらにより開発された解析手法である<sup>[2]</sup>。

AEM では、剛体要素とそれらを接続するばね要素に基づき解析対象を表現している。ここで、剛体要素そのものは変形しないが、ばね要素の変形によって他の剛体要素と重なることが許される。また、剛体要素は中心に自由度を持ち、自由度に生じる変位、すなわち剛体要素の移動や回転により解析対象の形状変化を表現する。一方ばね要素は剛体要素を繋ぐ軸ばねとせん断ばねで形成されており、解析対象の材料特性を表すものである。

2.1 AEM の剛性マトリックス

本節では文献[2]に基づき筆者らが作成した剛性マトリックスについて述べる (以下、本剛性マトリックスによる計算手法を本稿では「従来の AEM」と呼ぶ)。図 1 に剛体要素とばね要素の幾何学的関係を示す。AEM ではばね要素と剛体要素の幾何学的関係、および軸ばね剛性 ( $k_n$ ) とせん断ばね剛性 ( $k_s$ ) によりばね要素の剛性マトリックスが定められる。また、剛体要素を連結する複数のばね要素はそれぞれが並列であるため、要素の剛性マトリックスはばね要素の剛性マトリックスの和と等しくなる。要素中心から  $i$  番目に位置するあるばね要素の剛性マトリックスは  $6 \times 6$  サイズであるが、式 (1) では左上 ( $3 \times 3$  サイズ) 部分のみを示す。

$$K_{i, \text{左上}} = \begin{bmatrix} S_1^2 k_{ni} + C_1^2 k_{si} & -S_1 C_1 k_{ni} + S_1 C_1 k_{si} & -S_1 C_2 l_i k_{ni} + C_1 S_2 l_i k_{si} \\ -S_1 C_1 k_{ni} + S_1 C_1 k_{si} & C_1^2 k_{ni} + S_1^2 k_{si} & C_1 C_2 l_i k_{ni} + S_1 S_2 l_i k_{si} \\ -S_1 C_2 l_i k_{ni} + C_1 S_2 l_i k_{si} & C_1 C_2 l_i k_{ni} + S_1 S_2 l_i k_{si} & C_2^2 l_i^2 k_{ni} + S_2^2 l_i^2 k_{si} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、軸ばねの剛性  $k_{ni} = E \times A_i / L$ , せん断ばねの剛性  $k_{si} = G \times A_i / L$ ,  $E$ : ヤング係数,  $G$ : せん断弾性係数,  $A_i$ : ばね要素  $i$  が代表する断面積,  $L$ : 要素の長さ,  $l_i$ : 要素中心とばね要素  $i$  間の距離 (図 1 参照),  $\theta_i$ : 要素中心に対するばね要素

$i$  の方向角 (図 1 参照),  $\alpha_i$ : 要素中心とばね要素を繋ぐ線分とばね要素が接する辺の夾角 (図 1 参照),  $S_1: \sin(\theta_i + \alpha_i)$ ,  $S_2: \sin \alpha_i$ ,  $C_1: \cos(\theta_i + \alpha_i)$ ,  $C_2: \cos \alpha_i$  である。

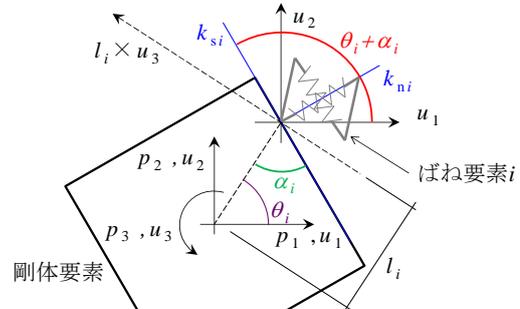


図 1 剛体要素とばね要素の幾何学的関係

2.2 剛性マトリックスの簡略化

検討のため、図 2 に示すように要素中心から  $i$  番目に位置するばね要素  $i$  と要素中心に対して対称の位置にあるばね要素  $i'$  を一組とし、 $n$  組のばねが各要素を繋いでおり、各ばねの軸が全体座標系の軸と一致する場合を想定すると式 (2) の関係が得られる。

- ①  $\sin(\theta_i + \alpha_i) = \sin(\theta_{i'} + \alpha_{i'}) = 1$
- ②  $\cos(\theta_i + \alpha_i) = -\cos(\theta_{i'} + \alpha_{i'}) = 0$
- ③  $\sin \alpha_i = \sin \alpha_{i'}$ , ④  $\cos \alpha_i = -\cos \alpha_{i'}$
- ⑤  $l_i \cdot \sin \alpha_i = L/2$ , ⑥  $l_i \cdot \cos \alpha_i = h(i - 0.5)/2n$
- ⑦  $A_i = bh/2n$ ,  $A = bh$
- ⑧  $k_{ni} = EA_i/L = Ebh/2nL$ , ⑨  $k_{si} = GA_i/L = Gbh/2nL$

それぞれの条件および式 (1) を用いて全ばね要素の剛性マトリックスの和 ( $K = \sum_{i=1}^n (K_i + K_{i'})$ ) を求めると式 (3) のようになる。

$$K_{\text{単純化, 左上}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GA}{L} & \frac{GA}{2} \\ \text{sym.} & \frac{E}{L} \left( \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{48n^2} \right) + \frac{GA}{L} \cdot \left( \frac{L}{2} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

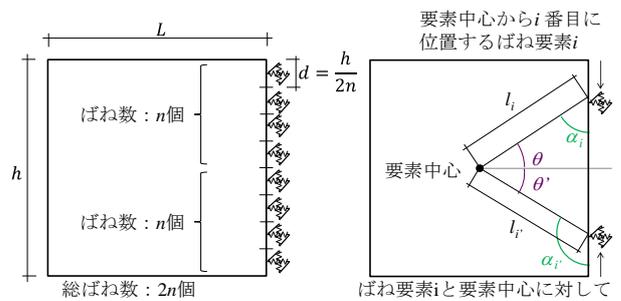


図 2 剛性マトリックスを簡略化するための仮定

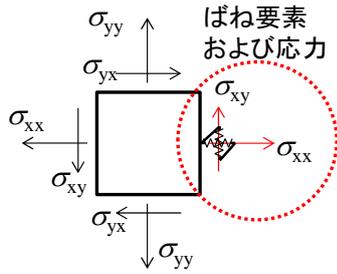
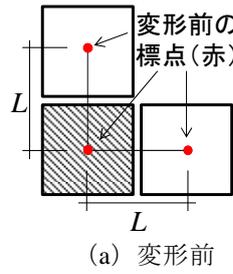
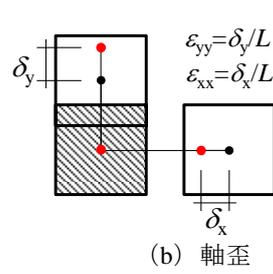


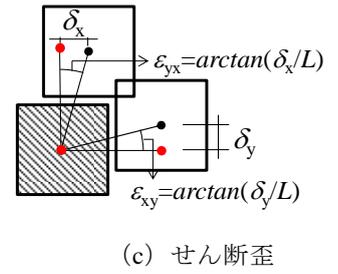
図3 平面応力状態でのばね要素と応力



(a) 変形前



(b) 軸歪



(c) せん断歪

図4 要素の変形とばねの歪

### 3. 要素剛性マトリックスの修正

#### 3.1 ばね数の影響とその修正

式 (3) の内, 3 行 3 列目の項  $-Ebh^3/(48n^2)$  はばね数 ( $n$ ) によりその値が変化する。しかし, この値はばね数を増加させるとゼロに近づくため, この項の影響を除去できるよう予め工夫しておくが良い。そこで, 式 (3) の 3 行 3 列目の項 ( $Ebh^3/(48n^2)$ ) を  $2n$  個に分けた ( $Ebh^3/(48n^2)/2n = k_n(d^2/12)$ ) (ここで,  $d$  は  $h/2n$  であり, 要素の長さ/要素 1 辺のばね数) を式 (1) に加えた式 (4) を要素剛性マトリックスとして用いると, ばね数を増やすことなく精度良い解析が可能になる。

$$K_{i, \text{左上}} = \begin{bmatrix} S_1^2 k_{ni} + C_1^2 k_{si} & -S_1 C_1 k_{ni} + S_1 C_1 k_{si} & -S_1 C_2 l_i k_{ni} + C_1 S_2 l_i k_{si} \\ -S_1 C_1 k_{ni} + S_1 C_1 k_{si} & C_1^2 k_{ni} + S_1^2 k_{si} & C_1 C_2 l_i k_{ni} + S_1 S_2 l_i k_{si} \\ -S_1 C_2 l_i k_{ni} + C_1 S_2 l_i k_{si} & C_1 C_2 l_i k_{ni} + S_1 S_2 l_i k_{si} & C_2^2 l_i^2 k_{ni} + S_2^2 l_i^2 k_{si} + k_{ni} (d^2/12) \end{bmatrix} \quad (4)$$

#### 3.2 せん断ばね剛性の修正

従来の AEM で用いられているせん断ばねの剛性 ( $k_{si} = GA_i/L$ ) は線材のせん断応力に着目したものであるが, 格子で要素を組む場合のせん断剛性は平面応力状態に基づき評価する必要がある (図 3 および図 4 に平面応力状態でのばね要素と応力の関係および要素の変位とばねの歪の関係をそれぞれ示す)。よって, 平面応力状態およびフックの法則に基づき, 各ばねの剛性  $k_n$  と  $k_s$  は式 (5) および (6) のように求められる。

$$\sigma_n = \sigma_{xx} = E \cdot \epsilon_{xx} = E \cdot \delta_x / L \quad (5)$$

$$k_{ni} = E \cdot A_i / L$$

$$\sigma_s = \sigma_{xy} = G \cdot \gamma = G \cdot (\epsilon_{xy} + \epsilon_{yx}) = G \cdot (2\epsilon_{xy}) = 2G \cdot \delta_y / L \quad (6)$$

$$k_{si} = 2G \cdot A_i / L$$

ここで,  $\sigma_n$  および  $\sigma_s$ : 軸およびせん断ばねにおける応力,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\epsilon_{xx}$  および  $\epsilon_{xy}$ : 平面応力状態での軸応力, せん断応力, 軸歪およびせん断歪,  $\gamma$ : 工学的せん断歪,  $E$ : 弾性係数,  $\delta_x$  および  $\delta_y$ : ばね方向に対する相手要素の相対変位,  $L$ : 要素の長さ,  $A_i$ : ばね要素が負担する領域の断面積である。 $k_{si}$  が見かけ上  $2G \cdot A_i/L$  になることに留意されたい。

### 4. 弾性解析による検討

上記の検討により修正された剛性マトリックスを用いた解析結果と, 弾性論による理論値 (ここで, 形状係数  $\kappa=1.2$  とした) および従来の AEM による解析結果を比較するため, ばね数および要素分割数が異なる図 5 のような片持ち梁を

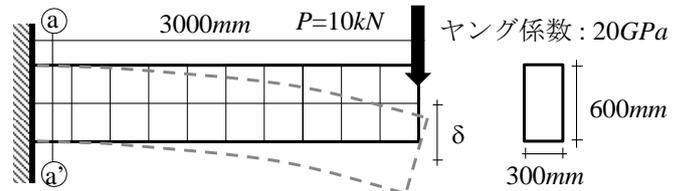


図5 弾性解析モデル

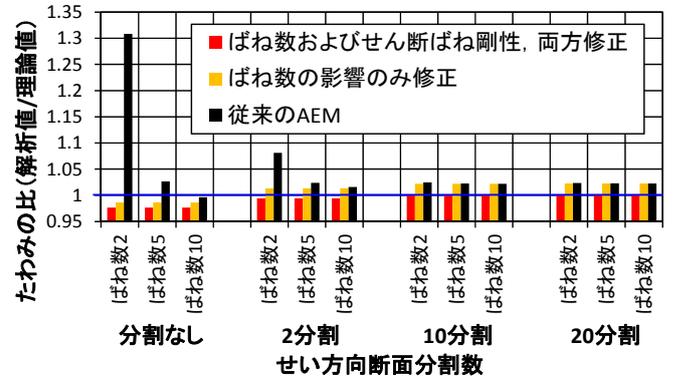


図6 剛性マトリックス修正前後の解析精度の比較

対象とする弾性解析を行った。図 6 にはそれぞれの方法で求められたたわみと理論値との比を示す (ここで, ばね数は要素の 1 辺当たりの数)。従来の AEM による解析結果 (■) はばね数や分割数が多くなるほど理論値に近づくものの, ほとんどの結果が理論値を過大評価している。ばね数による影響のみ修正した場合 (■), ばね数の影響はなくなったが, 分割数が多くなるほど理論値を上回る結果となった。これは, せん断ばね剛性を小さく評価 ( $k_{si} = G \cdot A_i/L$ ) したためである。一方, ばね数およびせん断ばね剛性を修正した場合 (■), ばね数の影響はなく, 分割数が多くなるほど理論値に収束し, 従来の AEM による結果に比べると全ケースで解析精度が飛躍的に向上した。

### 5. まとめ

本研究では, ばね数が AEM の解析精度に影響を及ぼす原因を無くし, 格子要素上適切なせん断ばねの剛性を用いることで従来の AEM により精度良い弾性解析結果が得られた。今後, 本報で修正した AEM を用い, 非線形解析を行う予定である。

#### 【参考文献】

- [1] 李煥九他: 応用要素法 (AEM) を用いた RC 梁部材の荷重-変形関係の推定, 日本建築学会学術講演梗概集, 2013 年 [2] Hatem TAGEL-DIN, A New Efficient Method for Nonlinear, Large Deformation and Collapse Analysis of Structures, Doctoral thesis, The University of Tokyo, 1998.6

\*1 東京大学 工学系研究科 大学院生

\*2 東京大学 生産技術研究所 助教・博士(工学)

\*3 東京大学 生産技術研究所 教授・工博

\*1 Graduate Student, Graduate School of Eng., The Univ. of Tokyo

\*2 Research Associate, IIS, The Univ. of Tokyo, Ph.D.

\*3 Professor, IIS, The Univ. of Tokyo, Dr. Eng.